

2 EX.1 1°/ Calculer  $g'(x)$ ;  $g(x) = (x^2 + 1)^4$

2 2°/ Montrer que l'équation :  $x^3 + x - 1 = 0$   
admet au moins une solution dans  $]0; 1[$

EX.2 soit  $f$  la fonction définie par :

$$(\forall x \in I = [0; +\infty[), f(x) = \frac{x+2}{x+4}$$

2 1°/ Calculer  $f(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 2°/ Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$

1 3°/ Déterminer  $J = f(I)$

3 4°/ Montrer que  $f$  admet une fct réciproque  
 $f^{-1}$  définie sur  $J$  et donner l'expression :  $f^{-1}(x)$

EX.3 on définit  $h$  par le tableau :

7 1°/ Déterminer :

$$h(-3); h(0)$$

$$h(4); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow 0} h(x);$$

$$h([-1; 4]); h([-3; -1[);$$

7 2°/ Quelle est la valeur minimale de  $h$  sur  $D_h$ ?

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$0$	$4$	$+\infty$
$h$	$+\infty$	$4$	$+\infty$	$2$	$-2$	$7$



## Correction du DS n°1

A

Ex.1 1°/  $g(x) = (x^2 + 1)^4$ 

$$g'(x) = 4 \times (x^2 + 1)' \times (x^2 + 1)^{4-1} = 4 \times 2x \times (x^2 + 1)^3$$

$$g'(x) = 8x(x^2 + 1)^3$$

2°/ Posons :  $f(x) = x^3 + x - 1$ 

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynôme) donc elle est continue sur  $[0; 1]$ .

$f(0) = -1$  et  $f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$  donc  $f(0) \times f(1) < 0$   
d'après T.V.I. l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $]0; 1[$ .

Ex.2

$$(\forall x \in I = [0; +\infty[) \quad f(x) = \frac{x+2}{x+4}$$

$$1°/ f(0) = \frac{0+2}{0+4} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

$$2°/ (\forall x \in I); f'(x) = \left( \frac{x+2}{x+4} \right)'$$

$$= \frac{(x+2)' \times (x+4) - (x+2)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{x+4 - (x+2)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{x+4-x-2}{(x+4)^2} = \boxed{\frac{2}{(x+4)^2}}$$

$$3°/ J = f(I) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$= \left[ \frac{1}{2}; 1[ \quad (\text{car } f \text{ est } \nearrow)$$

4°/  $f$  est une fonction rationnelle définie sur  $I$  donc  $f$  est continue sur  $I$



d'après 2° on a:  $(\forall x \in I); f'(x) = \frac{2}{(x+4)^2} > 0$   
 donc  $f$  est strictement croissante sur  $I$ ,  
 donc  $f$  admet une fct réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J$ .

Soient  $x \in J; y \in I$  on a:  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+2}{y+4} \Leftrightarrow x(y+4) = y+2$$

$$\Leftrightarrow xy + 4x = y + 2 \Leftrightarrow xy - y = 2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = 2-4x \Leftrightarrow y = \frac{2-4x}{x-1}$$

donc:  $(\forall x \in J) f^{-1}(x) = \frac{2-4x}{x-1}$

### EX. 3

1°  $f_1(-3) = 4; f_1(0) = 2; f_1(4) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 7; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = 2$$

$$f_1([-1; 4]) = [-2; +\infty[; f_1([-3; -1[) = [4; +\infty[$$

2° la valeur minimale de  $f_1$  sur  $D_{f_1}$  est

$$-2 = f_1(4)$$

Remarque:  $D_{f_1} = \mathbb{R} - \{-1\}$

— \* fin \* —

2 **EX.1** 1°/ Calculer  $g'(x)$ ;  $g(x) = (x^2 + 3)^5$

2 2°/ Montrer que l'équation:  $x^3 + 2x - 1 = 0$   
admet au moins une solution dans  $]0, 1[$

**EX.2** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$(\forall x \in [0; +\infty[) \quad f(x) = \frac{x+1}{x+3}$$

2 1°/ Calculer  $f(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2 2°/ Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$ .

1 3°/ Déterminer  $J = f(I)$

3 4°/ Montrer que  $f$  admet une fct réciproque  $f^{-1}$   
définie sur  $J$  et donner l'expression  $f^{-1}(x)$ .

**EX.3** on définit  $h$  par le tableau :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$5$	$+\infty$
$h$	$-\infty$	$4$	$-\infty$	$2$	$-1$	$+\infty$

7 1°/ Déterminer :

$$h(-2); h(1)$$

$$h(5); \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x); h([1, 5]); h([-2; 0[)$$

1 2°/ Déterminer  $D_h$ .



## Correction du D.S n°1

(B)

EX.1

1°  $g(x) = (x^2 + 3)^5$

$$g'(x) = 5 \times (x^2 + 3)' \times (x^2 + 3)^{5-1} = 5 \times 2x \times (x^2 + 3)^4$$

$$g'(x) = 10x(x^2 + 3)^4$$

2° posons :  $f(x) = x^3 + 2x - 1$

 $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynôme) donc : $f$  est continue sur  $[0; 1]$ .

$$f(0) = -1 < 0 \text{ et } f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0 \text{ donc :}$$

 $f(0) \times f(1) < 0$ . Donc d'après T.V.I  
l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  
dans  $]0; 1[$ .

EX.2

$$(\forall x \in I = [0; +\infty[) f(x) = \frac{x+1}{x+3}$$

1°  $f(0) = \frac{0+1}{0+3} = \boxed{\frac{1}{3}}$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1}$

2°  $f'(x) = \left( \frac{x+1}{x+3} \right)' = \frac{(x+1)'(x+3) - (x+1)(x+3)'}{(x+3)^2}$   
$$= \frac{(x+3) - (x+1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2} = \boxed{\frac{2}{(x+3)^2}}$$

3°  $J = f(I) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$   
$$= \left[ \frac{1}{3}; 1[ \quad (\text{car } f \text{ est } \nearrow)$$

4°  $f$  est une fonction rationnelle définie sur  $I$

donc elle est continue sur  $I$ .

et d'après 2°/  $(\forall x \in I) f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2} > 0$  donc  $f$  est **strictement** croissante sur  $I$  donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = f(I)$ .

Soient  $x \in J$  et  $y \in I$ ;  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y+3} \Leftrightarrow x(y+3) = y+1$$

$$\Leftrightarrow xy + 3x = y + 1 \Leftrightarrow xy - y = 1 - 3x$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = 1-3x \Leftrightarrow y = \frac{1-3x}{x-1}$$

donc :  $(\forall x \in J) f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{x-1}$

### EX.3

1°/  $h(-2) = 4$ ;  $h(1) = 2$ ;  $h(5) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty;$$

$$h([1, 5]) = [-1, 2]; \quad h([-2, 0[) = ]-\infty, 4]$$

2°/  $D_h = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ .

— \* fin \* —